

UN PEU D'ANALYSE ASYMPTOTIQUE, UN PEU D'ÉQUADIFFS

Trois niveaux de difficulté/longueur :

- Piste bleue : partie 1.
- Piste rouge : partie 1 et 2.
- Piste noire : tout le devoir.

Les trois parties de ce devoir sont indépendantes.

■ 1 SOMMES DE RIEMANN

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$.

- 1) Montrer, au moyen d'une inégalité taylorienne, que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \int_0^1 f(x) dx + \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
- 2) En déduire un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^n k \ln(n+k)$ à la précision $O(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

■ 2 SOLUTIONS BORNÉES D'UNE ÉQUATION DE STURM-LIOUVILLE

On s'intéresse dans ce petit problème au caractère borné ou non des solutions de certaines *équations de Sturm-Liouville*. On se donne une fois pour toutes une fonction $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à la fois paire et T -périodique et on note \mathcal{E} l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire $y'' + qy = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Attention, q est réelle, mais les solutions étudiées sont complexes.

Le théorème suivant est admis. Il sera étudié en deuxième année.

■ **Théorème (Cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz)** Pour tous $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule fonction $y \in \mathcal{E}$ pour laquelle $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.

D'après ce résultat, on peut noter y_1 et y_2 les deux fonctions de \mathcal{E} pour lesquelles $\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y'_1(0) = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y'_2(0) = 1 \end{cases}$.

- 1) a) Montrer que y_1 et y_2 sont réelles et que y_1 est paire et y_2 impaire.
 b) Montrer que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et que $\mathcal{B} = (y_1, y_2)$ en est une base.
- 2) a) Montrer que l'application $y \xrightarrow{\alpha} (x \mapsto y(x + T))$ est un endomorphisme de \mathcal{E} . On note A sa matrice dans \mathcal{B} .
 b) Montrer que $A = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y'_1(T) & y'_2(T) \end{pmatrix}$.
 c) Montrer que la fonction $y_1 y'_2 - y'_1 y_2$ est constante sur \mathbb{R} , puis que $\det(A) = 1$.

On montre aisément par un calcul explicite que le polynôme $X^2 - \text{tr}(M)X + \det(M)$ annule M pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, i.e. que $M^2 - \text{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$. En particulier, le polynôme $P = X^2 - \text{tr}(A)X + 1$ annule A .

- 3) a) On suppose dans cette question que $\text{tr}(A) = 2$. Montrer que $\text{Ker}(a - \text{Id}_{\mathcal{E}}) \neq \{x \mapsto 0\}$, puis que \mathcal{E} contient une fonction bornée non identiquement nulle.
 b) Montrer que si $\text{tr}(A) = -2$, \mathcal{E} contient aussi une fonction bornée non identiquement nulle.

- 4) On suppose dans cette question que $|\operatorname{tr}(A)| < 2$.
- Montrer l'existence d'un nombre complexe $\omega \in \mathbb{U}$ pour lequel $\mathcal{E} = \operatorname{Ker}(a - \omega \operatorname{Id}_{\mathcal{E}}) \oplus \operatorname{Ker}(a - \bar{\omega} \operatorname{Id}_{\mathcal{E}})$.
 - En déduire que toute fonction de \mathcal{E} est bornée.
- 5) On suppose dans cette question que $|\operatorname{tr}(A)| > 2$. Montrer que la fonction nulle est la seule fonction bornée de \mathcal{E} .

■ 3 DÉRIVATION D'UN DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

Soient $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ convexe et $\alpha \geq 1$.

- On suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^\alpha$.
 - Calculer pour tout $\lambda \in]0, 1]$ un équivalent de $f(x + \lambda x) - f(x)$ et $f(x) - f(x - \lambda x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 - En déduire que $f'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha x^{\alpha-1}$.
- On suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^\alpha + o(x^{\alpha-1})$.
 - Calculer pour tout $\lambda \in]0, 1]$ un développement asymptotique de $f(x + \lambda\sqrt{x}) - f(x)$ et $f(x) - f(x - \lambda\sqrt{x})$ à la précision $o(x^{\alpha-1})$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 - En déduire que $f'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \alpha x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-\frac{3}{2}})$.